- ***ultimaClasse = età minima della classe degli anziani****, scelta dall'utente che dovrebbe essere 67 come indicato dalla legge Fornero, ma si può performare a scelta*

quindi:

  - ***Giovani = 0–14***
  - ***Attivi = 15–(ultimaClasse−1)***
  - ***Anziani = ultimaClasse–100***

Equazioni con ultimaClasse variabile

1) ***Indice di vecchiaia***

$$V = \frac{O}{Y} \cdot 100$$

dove:

- $(Y = \sum_{a=0}^{14} Pop(a))$
- $\left(O = \sum_{a=\text{ultimaClasse}}^{100} Pop(a)\right)$

---

2) Indice di dipendenza anziani

$$\left[D_A = \frac{O}{W} \cdot 100\right]$$

dove:

- $\left(W = \sum_{a=15}^{\text{ultimaClasse}-1} Pop(a)\right)$

---

3) Indice di dipendenza totale

$$\left[D_T = \frac{Y+O}{W} \cdot 100\right]$$

---

4) Indice di attività

$$\left[L = \frac{W}{Y+W+O} \cdot 100\right]$$

---

5) Indice sintetico di squilibrio strutturale

$$\left[S = \left(\frac{D_T}{L}\right) \cdot \left(\frac{V}{100}\right)\right]$$

Riscrittura delle formule col riferimento all'ultima classe

Indice di vecchiaia

$$\left[V = \frac{\sum_{a=\text{ultimaClasse}}^{100} Pop(a)}{\sum_{a=0}^{14} Pop(a)} \cdot 100\right]$$

Dipendenza anziani

$$\left[D_A = \frac{\sum_{a=\text{ultimaClasse}}^{100} Pop(a)}{\sum_{a=15}^{\text{ultimaClasse}-1} Pop(a)} \cdot 100\right]$$

Dipendenza totale

$$\left[D_T = \frac{\sum_{a=0}^{14} Pop(a) + \sum_{a=\text{ultimaClasse}}^{100} Pop(a)}{\sum_{a=15}^{\text{ultimaClasse}-1} Pop(a)} \cdot 100\right]$$

Indice di attività

$$\left[L = \frac{\sum_{a=15}^{\text{ultimaClasse}-1} Pop(a)}{\sum_{a=0}^{100} Pop(a)} \cdot 100\right]$$

Indice sintetico di squilibrio strutturale

$$\left[S = \left(\frac{D_T}{L}\right) \cdot \left(\frac{V}{100}\right)\right]$$

Cos'è l'indice sintetico di squilibrio strutturale S

S: misura quanto la struttura demografica di un territorio è sbilanciata rispetto alla sua capacità attiva (15–ultimaClasse−1).

Combina tre dimensioni fondamentali:

- **Invecchiamento** → quanti anziani rispetto ai giovani
- **Dipendenza totale** → quanti non attivi rispetto agli attivi
- **Attività** → quanta forza lavoro c'è

Perché **S** è utile nel modello

Gli altri indici descrivono aspetti separati:

- V invecchiamento
- D_A carico degli anziani sui giovani
- D_T carico dei non attivi
- W forza degli attivi
- S invece:

- **li integra in un unico numero**, rendendo immediato il confronto tra comuni e tra diverse scelte di *ultimaClasse*.
- **È l'indice più sintetico e più esplicativo del modello.**

La formula è:

$$\left[S = \left(\frac{D_T}{L}\right) \cdot \left(\frac{V}{100}\right)\right]$$

Indice sintetico di squilibrio strutturale

Cosa significa davvero **S**

L'indice cresce quando:

- **aumentano gli anziani** → struttura più pesante
- **aumentano i non attivi** → più carico sugli attivi
- **diminuiscono gli attivi** → meno forza lavoro disponibile

In altre parole:

S: misura la pressione complessiva che la struttura demografica esercita sulla popolazione attiva.

È un indicatore di sostenibilità demografica.

Interpretazione pratica

- **S basso**

  → struttura giovane, equilibrata, sostenibile
- **S medio**

  → equilibrio fragile, segnali di pressione
- **S alto**

  → struttura anziana, molti dipendenti, pochi attivi

  → squilibrio strutturale marcato

Tabella riassuntiva:

Sigla	Nome Italiano	Nome Inglese	Descrizione	Formula
Y	Popolazione giovane	Young Population	Età 0–14	
W	Popolazione in età attiva	Working-Age Population	Età 15–ultimaClasse−1	
O	Popolazione anziana	Older Population	Età ultimaClasse–100	
V	Indice di vecchiaia	Ageing Index	Rapporto tra anziani e giovani	$V = \frac{O}{Y} \cdot 100$
D_A	Indice di dipendenza anziani	Old-Age Dependency Ratio	Rapporto tra anziani e attivi	$\left[D_A = \frac{O}{W} \cdot 100\right]$
D_T	Indice di dipendenza totale	Total Dependency Ratio	Rapporto tra giovani+anziani e attivi	$\left[D_T = \frac{Y + O}{W} \cdot 100\right]$
L	Indice di attività	Activity Index	Percentuale di popolazione attiva	$\left[L = \frac{\sum_{a=15}^{\text{ultimaClasse}-1} Pop(a)}{\sum_{a=0}^{100} Pop(a)} \cdot 100\right]$
S	Indice di squilibrio strutturale	Structural Imbalance Index	Pressione complessiva dei non attivi sugli attivi	$\left[S = \left(\frac{D_T}{L}\right) \cdot \left(\frac{V}{100}\right)\right]$

Dimostrazione:

1) Relazione tra dipendenza totale, dipendenza anziani e vecchiaia

$$\left[D_T = D_A, \left(1 + \frac{100}{V}\right)\right]$$

Step 1 — Definizioni di base

- $\boldsymbol{D_A}$

$$\left[D_A = \frac{O}{W} \cdot 100\right]$$

- **V**

$$\left[V = \frac{O}{Y} \cdot 100\right]$$

- $\boldsymbol{D_T}$

$$\left[D_T = \frac{Y + O}{W} \cdot 100\right]$$

Step 2 — Riscrivo $\boldsymbol{D_T}$

Partiamo da:

$$\left[D_T = \frac{Y + O}{W} \cdot 100\right]$$

Separiamo la frazione:

$$\left[D_T = \left(\frac{O}{W} + \frac{Y}{W}\right) \cdot 100\right]$$

Il primo termine è $\boldsymbol{D_A/100 \times 100 = D_A}$:

$$\left[\frac{O}{W} \cdot 100 = D_A\right]$$

Step 3 — Espressione di Y tramite V

Da:

$$\left[V = \frac{O}{Y} \cdot 100\right]$$

ricaviamo:

$$\left[Y = \frac{O \cdot 100}{V}\right]$$

Step 4 — Sostituzione in $\boldsymbol{D_T}$

$$\left[D_T = D_A + \frac{Y}{W} \cdot 100\right]$$

Sostituiamo Y:

$$\left[D_T = D_A + \frac{O \cdot 100}{V \cdot W} \cdot 100\right]$$

Ma:

$$\left[\frac{O}{W} \cdot 100 = D_A\right]$$

Quindi:

$$\left[D_T = D_A + D_A \cdot \frac{100}{V}\right]$$

Fattorizziamo:

$$\left[D_T = D_A \left(1 + \frac{100}{V}\right)\right]$$

Relazione dimostrata.

2) Relazione tra attività e dipendenza totale

$$\left[L = \frac{10000}{100 + D_T}\right]$$

Step 1 — Definizione dell'indice di attività

$$\left[L = \frac{W}{Y + W + O} \cdot 100\right]$$

Il denominatore è la popolazione totale:

$$[Pop(U) = Y + W + O]$$

Step 2 — Riscrivo Pop in funzione di W e D_T

Da:

$$\left[D_T = \frac{Y + O}{W} \cdot 100\right]$$

ricaviamo:

$$\left[Y + O = \frac{D_T}{100} \cdot W\right]$$

Quindi:

$$\left[Pop = W + \frac{D_T}{100} \cdot W\right]$$

Fattorizziamo W:

$$\left[Pop = W \left(1 + \frac{D_T}{100}\right)\right]$$

Step 3 — Sostituzione in L

$$\left[L = \frac{W}{W\left(1 + \frac{D_T}{100}\right)} \cdot 100\right]$$

Semplifichiamo W:

$$\left[L = \frac{100}{1 + \frac{D_T}{100}}\right]$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per 100:

$$\left[L = \frac{10000}{100 + D_T}\right]$$

Relazione dimostrata.

Sintesi finale

- La prima relazione mostra che $\boldsymbol{D_T}$ è la dipendenza anziani **corretta** per il rapporto tra anziani e giovani.
- La seconda relazione mostra che **L** è **inversamente proporzionale** alla dipendenza totale.

Insieme, queste relazioni spiegano **la logica interna del modello demografico**.

Completo il quadro con la derivazione matematica dell'indice S, mostrando come nasce esattamente dalla combinazione di:

- $\boldsymbol{D_T}$ → **Total Dependency Ratio**
- **V** → **Ageing Index**
- $\boldsymbol{D_A}$ → **Old-Age Dependency Ratio**

Questa è la parte del modello: S che non è un indice arbitrario, ma una conseguenza logica della struttura demografica.

Derivare S

L'indice di squilibrio strutturale è definito come:

$$\left[\boldsymbol{S = \left(\frac{D_T}{L}\right) \cdot \left(\frac{V}{100}\right)}\right]$$

Ora si dimostra perché questa forma è coerente e da dove nasce.

1) Riscriviamo gli indici di base

Dipendenza totale

$$\left[\boldsymbol{D_T = \frac{Y + O}{W} \cdot 100}\right]$$

Vecchiaia

$$\left[\boldsymbol{V = \frac{O}{Y} \cdot 100}\right]$$

Dipendenza anziani

$$\left[\boldsymbol{D_A = \frac{O}{W} \cdot 100}\right]$$

2) Espressione di D_T in funzione di D_A e V

Questa l'abbiamo già dimostrata:

$$\left[\boldsymbol{D_T = D_A\left(1 + \frac{100}{V}\right)}\right]$$

È la relazione chiave: $\boldsymbol{D_T}$ è $\boldsymbol{D_A}$ corretto per il rapporto tra anziani e giovani.

3) Inseriamo questa relazione dentro S

Partiamo dalla definizione:

$$\left[\boldsymbol{S = \left(\frac{D_T}{L}\right) \cdot \left(\frac{V}{100}\right)}\right]$$

Sostituiamo $\boldsymbol{D_T}$**:**

$$\left[\boldsymbol{S = \left(\frac{D_A\left(1 + \frac{100}{V}\right)}{W}\right) \cdot \left(\frac{V}{100}\right)}\right]$$

4) Riscriviamo D_A in forma esplicita

$$\left[\boldsymbol{D_A = \frac{O}{W} \cdot 100}\right]$$

Sostituiamo:

$$\left[\boldsymbol{S = \left(\frac{\frac{O}{W} \cdot 100\left(1 + \frac{100}{V}\right)}{W}\right) \cdot \left(\frac{V}{100}\right)}\right]$$

5) Semplificazione

Il termine centrale diventa:

$$\left[\frac{O}{W^2} \cdot 100\left(1 + \frac{100}{V}\right)\right]$$

Moltiplicato per:

$$\left[\frac{V}{100}\right]$$

Otteniamo:

$$\left[S = \frac{O}{W^2} \cdot V\left(1 + \frac{100}{V}\right)\right]$$

Distribuiamo:

$$\left[S = \frac{O}{W^2}(V + 100)\right]$$

Interpretazione finale

La formula mostra che **S** cresce quando:

- **O** **aumenta →** più anziani
- **W** **diminuisce** → meno attivi
- **V** **aumenta →** pochi giovani rispetto agli anziani
- D_T **aumenta →** più dipendenti totali

In altre parole:

S è una misura sintetica della pressione strutturale esercitata da giovani e anziani sulla popolazione attiva, corretta per il grado di invecchiamento.

È l'indice più completo del modello, almeno lo penso, anche se non so se non sia stato calcolato da altri data la mia condizione di dilettante estemporaneo applicato alla materia.